215 - Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

I. Différentielle

[Rou]

Notation : Soient X un espace topologique, E et F deux espaces
46 de Banach, $f : X \to E$ et $g : X \to F$ deux applications et $a \in X$.
On dit que $f = o(g)$ en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe V voisinage de a tel que : $\forall x \in V$, $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$

Déf. ① : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in U$. On dit que f est
45 différentiable en x_0 s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que :
$\forall h \in \mathbb{R}^n / x_0 + h \in U$, $f(x_0 + h) = f(x_0) + \ell(h) + o(h)$

Déf. / Prop ② : Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x_0 \in U$,
46 alors ℓ est unique. On l'appelle différentielle de f en x_0, notée $df(x_0)$.

Déf. ③ : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout $x \in U$.
$df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, $x \mapsto df(x)$ est appelée différentielle de f sur U

Rq ④ : Les définitions précédentes sont toujours valables pour $f : E \to F$ où E et F sont des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie

Ex ⑤ : 1) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
46 Alors f est différentiable en a SSI f est dérivable en a.
On a alors $df(a)(h) = h f'(a)$ $\forall h \in \mathbb{R} / a + h \in I$

2) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) = f$

Prop ⑥ : 1) Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to \mathbb{R}^p$ et $x_0 \in U$. Si f et g sont différentiable en x_0, alors $f + g$ est différentiable en x_0 et $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$

De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en x_0 et $d(\lambda f)(x_0) = \lambda df(x_0)$

2) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ deux ouverts, $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$, 50
$x_0 \in U$. Si f est différentiable en x_0 et g est différentiable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x_0 et $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$

Ex. ⑦ : 1) Soit $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une application bilinéaire,
$u : U \to \mathbb{R}^p$, $v : U \to \mathbb{R}^p$ différentiables en $x \in U$. 56
Alors $f = B(u, v)$ est différentiable en x et
$$df(x)(h) = B(u(x), dv(x)(h)) + B(du(x)(h), v(x))$$
(application à un produit scalaire)

2) Formule de Leibniz : $f, g : U \to \mathbb{R}$ différentiables en $x \in U$ ♡
alors $d(fg)(x)(h) = f(x) \times dg(x)(h) + df(x)(h) \times g(x)$ ++

Prop. ⑧ : Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x_0 \in U$, alors f est continue en x_0. 50

Déf. / Prop. ⑨ : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $x_0 \in U$. Alors il 48-49
existe un unique vecteur $\nabla_{x_0} f \in \mathbb{R}^n$ tel que $df(x_0)(h) = \langle \nabla_{x_0} f, h \rangle$.
$\nabla_{x_0} f$ est appelé gradient de f en x_0.

II. Inégalité des accroissements finis (IAF)

[Rou] ~106

Th. ⑩ : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
Si : $\forall t \in]a,b[$, $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ alors $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

Déf. ⑪ : Soient $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$. Le segment $[x_0, x_1]$ est $\{(1-t)x_0 + t x_1, t \in [0,1]\}$.
On dira que $x \in [x_0, x_1]$ s'il existe $t \in [0,1]$ tel que $x = (1-t)x_0 + t x_1$.

[Rou] **Coro (12) :** Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et $x_0, x_1 \in U$

104 tels que $[x_0, x_1] \subset U$.

Si : $\exists M > 0 \;/\; \forall x \in]x_0, x_1[, \; \|df(x)\| \leq M$

alors $\|f(x_1) - f(x_0)\| \leq M \|x_1 - x_0\|$

Appli. (13) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable.

105 1) Si U est convexe et $\forall x \in U$, $\|df(x)\| \leq M$ alors f est M-lipschitzienne

106 2) Si U est connexe et $\forall x \in U$, $df(x) = 0$ alors f est constante.

Rq (14) : Si U n'est pas connexe et $df = 0$, alors f est localement constante (i.e. constante sur les composantes connexes de U).

III. Dérivées partielles. Applications de classe $\mathcal{C}^1$

1) Dérivées partielles, matrice jacobienne

[Rou] **Déf. (15) :** Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$, $x \in U$ et $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$.

On dit que f admet en x une dérivée dans la direction de u si

49 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(x+tu)$ définie au voisinage de 0 est dérivable en 0.

On note $f'_x(u) = g'(0) \in \mathbb{R}^p$.

Prop. (16) : Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $x \in U$, alors elle admet

49 en x des dérivées dans toutes les directions.

$$\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad f'_x(u) = df(x)(u).$$

Notation : $(e_1 \dots e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

Déf. (17) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. On dit que f admet en $x \in U$ une dérivée

50 partielle par rapport à la i-ème variable si f admet en x une dérivée dans la direction de e_i.

On note : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f'_x(e_i) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+te_i) - f(e_i)}{t}$

Rq (18) : Si f est différentiable en x, alors pour tout $h = (h_1 \dots h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Ex (19) : 1) Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x \in U$, 49

alors $\nabla_x f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0) \\ \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \end{cases}$$ 49

Alors f n'est pas différentiable en 0 mais ses dérivées partielles existent.

Déf. (20) : Soit $f = (f_1 \dots f_p) : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $x_0 \in U$.

La matrice jacobienne de f en x_0 est

$$J_{x_0} f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$$ 50

Prop. (21) : Sous les hypothèses de la proposition (6), ♡

$$J_{x_0}(g \circ f) = J_{f(x_0)}\, g \times J_{x_0} f$$

2) Applications de classe $\mathcal{C}^1$ [Rou]

Déf. (22) : $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est différentiable 54

sur U et si $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue.

Th (23) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout $x \in U$ et qu'elles sont continues en $x_0 \in U$.

Alors f est différentiable en x_0.

Th. (24) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable. Alors f est $\mathcal{C}^1$ SSI ses dérivées partielles sont continues.

215
(2)
V1

54 Coro (25) : $f : U \to \mathbb{R}^p$ est $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles existent et sont continues sur U.

dém. 115)

~117 Th. (26) : Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Si : 1) $\exists x_0 \in U$ / $(f_k(x_0))_k$ converge dans $\mathbb{R}^p$

2) U est connexe

DVP 3) $(df_k)_k$ converge localement uniformément vers $\phi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

alors : $(f_k)_k$ converge localement uniformément vers $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$

et $df = \lim_k df_k = \phi$.

Appli. (27) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$d\exp(X)(H) = e^X \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\mathrm{ad}X(H))^k}{k!} \quad \text{où} \quad \mathrm{ad}X(H) = XH - HX$$

IV. Différentielle d'ordre 2

[Rou]

293 Déf. (28) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ différentiable en $x \in U$. On dit que f est deux fois différentiable en x_0 si df est différentiable en x_0.

On note $d^2f(x) = d(df)(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ qui s'identifie à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$

Les composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ de $df(x)$ admettent alors des dérivées partielles en x_0 notées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

295 Déf. (29) : $f : U \to \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues.

294 Th. (30) : (Schwarz) Si $f : U \to \mathbb{R}^p$ est deux fois différentiable en $x_0 \in U$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$

294 Déf. (31) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $x_0 \in U$. La matrice hessienne de f en x_0 est

$$H_{x_0}f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$ $H_{x_0}f$ est symétrique.

Prop. (32) : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in U$ et admet un extremum local en x_0, alors $df(x_0) = 0$ 371

Th. (33) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$ et f est deux fois différentiable en x_0.

1) Si f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0, alors $H_{x_0}f$ est positive (resp. négative)

2) Si $H_{x_0}f$ est définie positive (resp. négative), alors f admet en x_0 un minimum (resp. maximum) local strict.

3) Rajouter le point selle si $H_{x_0}f$ a pour signature (p,q) où $p \neq 0$ et $q \neq 0$ [Gou]

Exo. (34) : $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extremum relatifs de f. Rajouter Taylor-reste intégral 298 337

V. $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Théorème d'inversion locale.

[Rou]

Déf. (35) : Une application $f : U \to V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si f est bijective, $\mathcal{C}^1$ et si f^{-1} est $\mathcal{C}^1$ 188

Rq (36) : Si f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme, alors $df(x)$ est inversible $\forall x \in U$, mais la réciproque est fausse (ex $f(x,y) = (e^x\cos y, e^x \sin y)$)

Th. (37) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_0 \in U$. 341

Si $df(x_0)$ est inversible, alors il existe V voisinage ouvert de x_0 et W voisinage ouvert de $f(x_0)$ tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. ← Morse 354 + appli. plan tangent 341

[Za] 49 Appli. (38) : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective DVP

[GT] 64 Appli. (39) : (Th. de Brouwer) DVP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $B = B_f(0,1) \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $f : B \to B$ une application continue.

Alors f admet (au moins) un point fixe.

Références :

- [Rou] Rouvière, PGCD
- [Gou] Gourdon, Analyse (3e éd.)
- [Za] Zavidovique, Un max de maths
- [GT] Gonnord, Tosel, Calcul différentiel